Hàm Sprague – Grundy trong trò chơi toán học

N.V.Lợi
Hội toán học Hà Nội

Trong toàn bộ tài liệu này, trò chơi được xét tới là trò chơi hữu hạn bước đi và có hai người chơi.

1 Hàm Sprague – Grundy

Bước đi: Sự di chuyển từ vị trí này sang vị trí khác tuân thủ luật chơi gọi là bước đi (thao tác).
Thế thua, thế thắng: là những vị trí mà xuất phát từ đó người đi chắc chắn sẽ thua (thắng).
Bước tiếp theo (trực tiếp): Là bước đi trực tiếp từ vị trí X đến vị trí Y lân cận (láng giềng) của nó phù hợp luật chơi.
Trò chơi hữu hạn: là trò chơi chỉ sau một số bước đi hữu hạn thì kết thúc.

Định lý 1. *Trong trò chơi hữu hạn không tồn tại chu trình.*

Trò chơi thông dụng (bình thường). Là trò chơi mà người thắng cuộc là người thực hiện được bước đi cuối cùng.
Vị trí đứng – Thế đứng là vị trí mà người chơi chuẩn bị đi tiếp tục hoặc kết thúc cuộc chơi.
Chiến lược thắng: Là cách chơi mà nếu khi áp dụng nó đối phương hoàn toàn không có khả năng thắng.
Định nghĩa số nhỏ nhất còn sót. Có một bộ số nguyên không âm $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Số nhỏ nhất còn sót của bộ số này là số nhỏ nhất không xuất hiện trong các số x_i $(i = 1, \ldots, n)$. Kí hiệu giá trị này là $\text{mex}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (minimal excluded).

Định nghĩa số Grundy của vị trí đang đứng. *Trong một trò chơi hữu hạn số Grundy của một vị trí đứng X hoặc bằng 0 nếu không có bước tiếp theo, hoặc tất cả các số của các bước tiếp theo của nó đều đã được ghi số, khi đó số của vị trí đó là số nhỏ nhất còn sót.*

Ví dụ: Bộ số nguyên không âm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các giá trị của các bước tiếp theo của vị trí X, khi đó số Grundy của X sẽ là số còn sót nhỏ nhất của bộ số này và kí hiệu giá trị này là $G(X)$.

Định lý 2. *Trong trò chơi hữu hạn mọi vị trí đều có duy nhất số Grundy của mình.*

Chứng minh. Phản chứng. Giả sử theo quy tắc của trò chơi, không còn vị trí nào có thể gán số, nhưng vẫn còn vị trí X_1 không có số. Điều này chỉ có thể nếu một vị trí tiếp theo X_2 nào đó của X_1 cũng không thể ghi được số, vì nếu không, khi đó X_1 không có số tiếp theo của mình, do đó nó được ghi số 0, vì nếu trường hợp khác thì ta đã gán cho nó số nhỏ nhất còn sót. Tiếp tục như vậy X_2 có vị trí X_3 tiếp theo mà cũng chưa được gắn số, cứ như vậy với số vị trí X_4 tiếp theo, v... v.... Bằng cách này ta nhận được dãy vô cùng các vị trí $X_1, X_2, \ldots,$ không có vị trí nào được gắn số. Điều này chỉ có thể nếu đồ thị có đường tròn, mâu thuẫn vì trò chơi của ta là hữu hạn. □

Định nghĩa 1. Số Grundy của một trò chơi hữu hạn là số Grundy của vị trí xuất phát của trò chơi đó.

Tính chất.
Số Grundig của một trò chơi hữu hạn có 3 tính chất quan trọng sau:

1) Vị trí thua có số Grundy bằng 0.
2) Nếu một vị trí có số Grundy bằng 0, thì các bước tiếp theo của nó có số Grundy khác 0, hoặc trò chơi kết thúc.
3) Nếu một vị trí có số Grundy là $n(> 0)$ thì trong các số Grundy của các bước tiếp theo có tất cả các giá trị $(n-1)$, $(n-2)$, $\ldots$, 1, 0 (từ $(n-1) \to 0$).

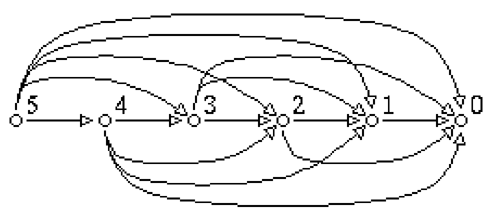
Định lý 3. *Trong một trò chơi hữu hạn người đi đầu có chiến lược thắng trận khi và chỉ khi số Grundy của vị trí xuất phát khác* 0.

2 Thực hành điền các giá trị của hàm Grundy trên trò chơi

Thuật toán.
B1. Với thế đứng không còn các bước đi tiếp theo (chấm dứt cuộc chơi) ta điền số 0.
B2. Với vị trí X chưa có số Grundy, sẽ được điền số $n \geq 0$ trong trường hợp sau:

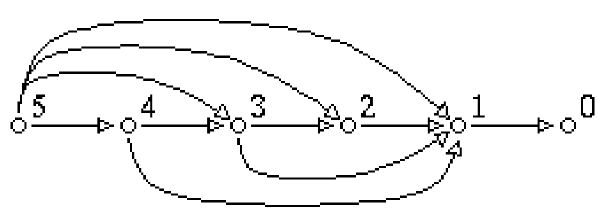
1. Nếu n là số nhỏ nhất còn sót trong các số của các vị trí tiếp sau của X.
2. Nếu tất cả các bước tiếp theo chưa ghi số của X đã có vị trí tiếp theo có số Grundig n.

a) Trò chơi: Bốc sỏi.
Trên bàn có một bốc sỏi. Mỗi người khi đến lượt có thể bốc số lượng sỏi tùy thích nhưng ít nhất 1 viên (có thể bốc tất cả). Ai là người thắng cuộc?



b) Trò chơi: Nguyên tố cùng nhau.
Trên bàn đang có n viên sỏi. Mỗi lần có thể lấy k (tùy thích) viên sỏi, nếu k và n nguyên tố cùng nhau. (Chý ý: số sỏi lấy của các lần sau phải nguyên tố cùng nhau với n).

Lời giải:



Ký hiệu R_n là giá trị Grundy của trò chơi xuất phát từ n phần tử. Khi đó hai vị trí đầu tiên có giá trị là $R_0 = 0$ và $R_1 = 1$.
Với $n = 2$ thì $R_2 = 0$

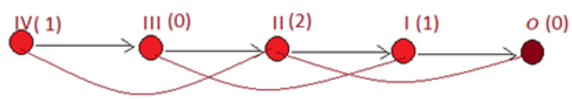
Với $n = 3$ thì $R_3 = 0$
Với $n = 5$ thì có thể lấy bất kì số nào trong các số $1,\ 2,\ 3$ và 4 do đó $R_5 = s.snn(R_1, R_2, R_3, R_4) = 3$.
Bạn đọc hãy tự kiểm nghiệm khẳng định người đi đầu chỉ có chiến thuật thắng khi số sỏi khi xuất phát đầu tiên là số chẵn.
Bảng sau liệt kê giá trị của R_n với n từ $1 \to 20$).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
R_n	0	1	0	2	0	3	0	4	0	2	0	5	0	6	0	2	0	7	0	8	0

c) Trò chơi: Bachet.

Trên bàn có n viên sỏi, t là một số nguyên dương cho trước. Mỗi lần đi có thể lấy ít nhất 1 viên và nhiều nhất không quá t viên sỏi. Ai lấy cuối cùng là người thắng trận.

Gợi ý.
Luôn luôn để lại trên bàn số sỏi là bội của $(t + 1)$. Ai đạt được tình trạng này người đó thắng.

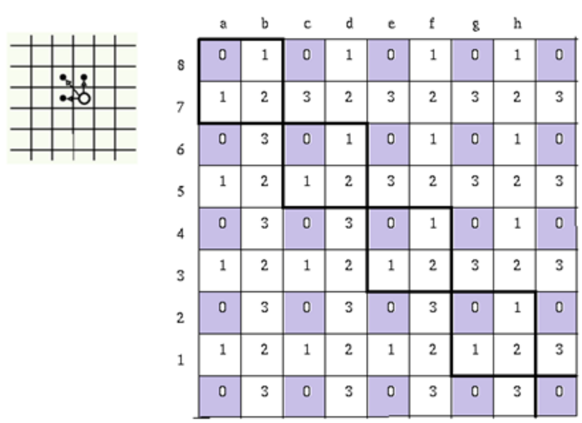


Ví dụ với 4 viên sỏi: $t = 2$. Mỗi một vị trí ta kí hiệu số sỏi (số Grundy) của vị trí đó.

d) Trò chơi: Cờ vua

Trên bàn cờ lưới ô vuông. Quân vua có thể đi chuyển sang bên trái, lên trên hay theo đường chéo, mỗi lần 1 đơn vị (ngang, thẳng hay chéo) từ góc phải bên dưới lên góc trái trên cùng. Người thắng cuộc là người đi bước cuối cùng.

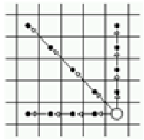
Gợi ý.

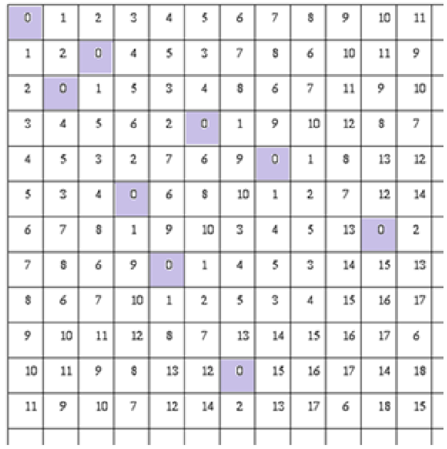


e) Trò chơi: Quân Hậu

Bàn cờ lưới ô vuông. Quân Hậu có thể đi theo hướng sang ngang, lên trên hoặc theo đường chéo song song với đường chéo vẽ từ đỉnh phía trên và bên trái, với một độ dài bước đi tùy thích.

Gợi ý.



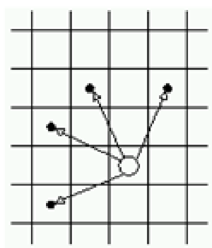


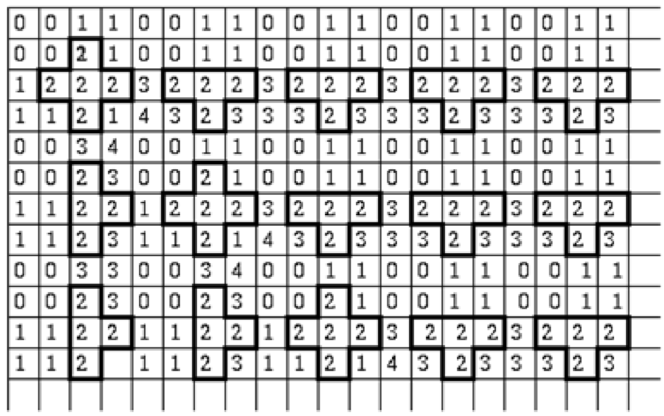
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	2	0	4	5	3	7	8	6	10	11	9
2	0	1	5	3	4	8	6	7	11	9	10
3	4	5	6	2	0	1	9	10	12	8	7
4	5	3	2	7	6	9	0	1	8	13	12
5	3	4	0	6	8	10	1	2	7	12	14
6	7	8	1	9	10	3	4	5	13	0	2
7	8	6	9	0	1	4	5	3	14	15	13
8	6	7	10	1	2	5	3	4	15	16	17
9	10	11	12	8	7	13	14	15	16	17	6
10	11	9	8	13	12	0	15	16	17	14	18
11	9	10	7	12	14	2	13	17	6	18	15

f) Trò chơi: Quân mã

Quân mã có thể bước theo 4 cách như trong hình vẽ. Di chuyển từ phía dưới bên phải lên phía trên bên trái. Ai là người thắng trận?

Gợi ý:



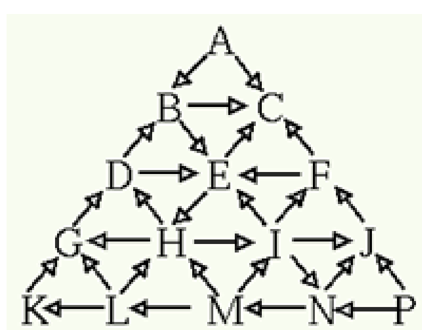


0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	2	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	2	2	2	3	2	2	2	3	2	2	2	3	2	2	2	3	2	2	2
1	1	2	1	4	3	2	3	3	3	2	3	3	3	2	3	3	3	2	3
0	0	3	4	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	2	3	0	0	2	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	2	2	1	2	2	2	3	2	2	2	3	2	2	2	3	2	2	2
1	1	2	3	1	1	2	1	4	3	2	3	3	3	2	3	3	3	2	3
0	0	3	3	0	0	3	4	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	2	3	0	0	2	3	0	0	2	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	2	2	1	1	2	2	1	2	2	2	3	2	2	2	3	2	2	2
1	1	2		1	1	2	3	1	1	2	1	4	3	2	3	3	3	2	3

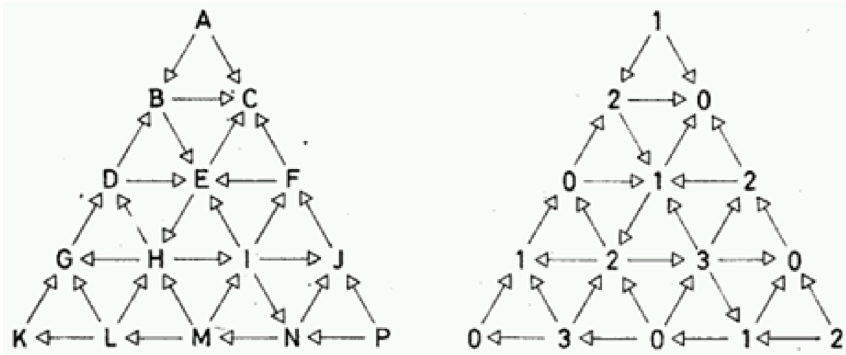
g) Trò chơi: Ùn tắc giao thông

Hình vẽ là sơ đồ giao thông một đất nước. Các thành phố được nối với nhau bằng các đường giao thông 1 chiều. Người ta thay nhau lái xe mỗi người một đoạn nối hai thành phố ví dụ từ X đến Y chẳng hạn (họ chỉ đổi tay lái cho nhau tại các thành phố). Người nào đưa ô tô đến đích trước là người thắng trận.

Ghi chú: Đây là bài toán không hữu hạn, nhưng người thứ 2 có chiến lược thắng trận.



Gợi ý:



3 Trò chơi tổng – Cấu trúc đại số

Định nghĩa: Trò chơi tổng của n trò chơi khác là một trò chơi hai người và cùng một lúc họ phải chơi trên n trò chơi. Mỗi bước đi người đến lượt chỉ được bước trên một trò chơi, nhưng trên trò nào thì hoàn toàn do người đó quyết định. Sau khi không còn có thể đi tiếp bất kì ở đâu thì người đi cuối cùng là người thắng trận.

Đây là trò chơi mà cùng một lúc phải quan tâm đến nhiều trò chơi gộp lại (nhưng không trộn vào nhau). Người thắng vẫn là người đi bước đi cuối cùng.
Để dễ hình dung trò chơi tổng, ta lấy ví dụ có hai trò chơi J_1 và J_2. Ký hiệu $J_1 \oplus J_2$ là trò chơi tổng của hai trò chơi này, tức là hai người đồng thời phải chơi hai trò chơi một lúc – mỗi bước đi cho trong một trò chơi. Người nào đi bước cuối cùng (kết thúc tất cả các trò chơi) thì người đó thắng. Tương tự như vậy ta có thể tổ chức các tổng $J_1 \oplus J_2 \oplus J_3$ của ba trò chơi J_1, J_2 và J_3.
Trong hệ đếm cơ số 2 chúng ta còn biết đến tổng nim của hai số được định nghĩa như một phép cộng không nhớ (tổng trực tiếp của các nhóm Abel):

$$\begin{array}{rr} & 1\,100\,100 \\ \oplus & \underline{\;\;110\,010} \\ & 1\,010\,110 \end{array}$$

Trong trò chơi tổng, một số hạng của tổng có khi là một trò chơi đơn, nhưng bản thân nó cũng có thể là một tổng nào đó của một số trò chơi khác.
Đầu tiên ta xét tổng $J \oplus J$ của hai phiên bản của cùng một trò chơi J. Trong trương hợp này Người thứ nhất không thể thắng nếu người thứ 2 luôn đi tương tự với bước đi của người thứ nhất nhưng ở trò chơi kia.
Trường hợp $J \oplus J \oplus J$ tình hình phức tạp hơn một chút. Nếu trong trò chơi J, người thứ 2 có chiến thuật thắng, thì trong $J \oplus J \oplus J$ cũng thắng. Nếu trong J người đi đầu có chiến thuật thắng thì trong tổng $J \oplus J \oplus J$ cũng thắng.

Định lý 4. *Nếu trò chơi hữu hạn J có số Grundy bằng 0 thì các trò chơi $J \oplus J$, $J \oplus J \oplus J$, $J \oplus J \oplus J \oplus J$, ... có số Grundy bằng 0. Nếu trò chơi hữu hạn J có số Grundy là số dương thì các trò chơi $J \oplus J \oplus J$, $J \oplus J \oplus J \oplus J \oplus J$, ... (có lẻ thành phần) thì có số Grundy là số dương và các trò chơi $J \oplus J$, $J \oplus J \oplus J \oplus J$, $J \oplus J \oplus J \oplus J \oplus J \oplus J$, ... (có chẵn thành phần) thì có số Grundy bằng 0.*

Định lý 5. *Gọi J_i số Grundy của trò chơi J_i. Khi đó số Grundy của trò chơi $J_1 \oplus J_2$ là tổng nim$j_1 \oplus j_2$ của J_1 và J_2.*

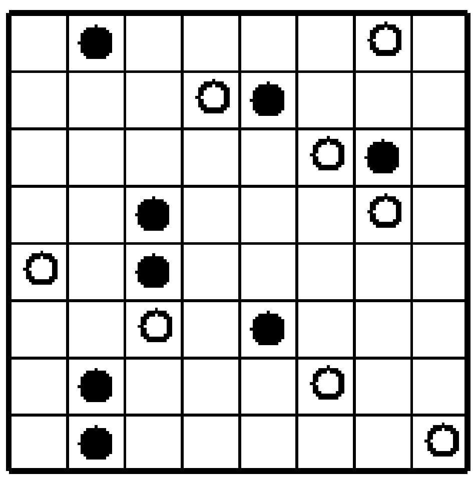
Định lý 6. *Số Grundy của trò chơi tổng của các trò chơi đơn giản trùng với tổng –nim của các số Grundy.*

Định lý 7. *Trong một trò chơi toán học người đầu tiên có chiến lược thắng khi và chỉ khí trong các bước tiếp theo của người đó có một bước nào đó có số Grundy bằng* 0.
Người thứ hai có chiến lược thắng khi và chỉ khi số Grundy của người đầu tiên có giá trị 0.
Trong mọi trường hợp khác cả hai tuyển thủ luôn có thủ thuật không thua, tức là trò chơi sẽ không kết thúc nếu cả hai cùng biết chơi thông minh.

4 Trò chơi NIM và họ hàng

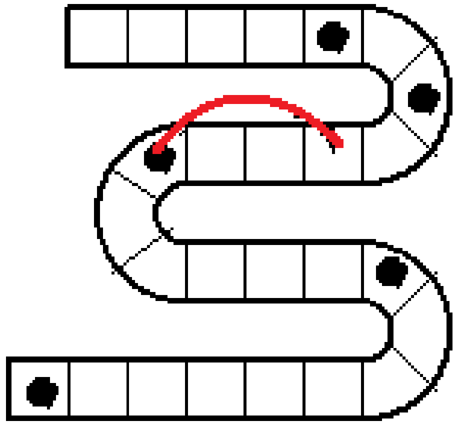
a) Trò chơi NIM. Có một vài bốc sỏi, mỗi bước đi từ một bốc sỏi người ta có thể lấy ít nhất 1 vài viên hoặc cả bốc. Người thắng cuộc là người lấy viên sỏi cuối cùng.
Hiển nhiên số Grundy của trò chơi là tổng Nim của các trò chơi bốc từ một nắm sỏi. Người muốn thắng thì sau mỗi bước đi cần để lại tổng nim bằng 0.

b) Trò chơi D. G. Northcott (Quân tốt). Trên bàn cờ 8×8, người ta chơi bằng 8 quân tốt đen và 8 quân tốt trắng. bắt đầu như trên hình vẽ, mỗi hàng có đúng trắng và đen mỗi loại 1 quân. Người bắt đầu sử dụng quân trắng dịch chuyển trong cùng một hàng sang trái hay sang phải số ô tùy ý nhưng không được nhảy qua đầu hoặc cùng đứng cùng ô với đối phương. Người thua là người không đi tiếp được nữa, tức là toàn bộ số quân của mình bị bao vây chặt cứng.



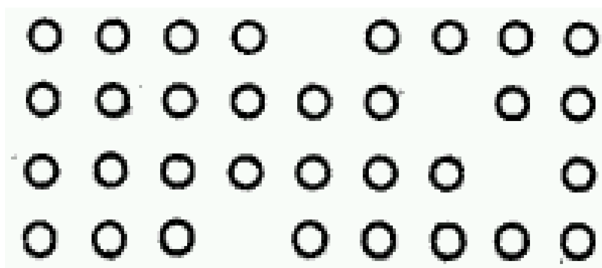
Mặc dù trò chơi không là hữu hạn, nhưng thực chất lại chính là một NIM "ẩn".
Trong trò chơi này các số sỏi trong mỗi bốc sỏi chính là số ô khoảng cách giữa 2 quân trằng và đen trên hàng đó.

c) Trò chơi Bong bóng. Ống đựng nước ngoằn nghèo được chia ra thành các ô. Người ta đặt vào một số ô các quả bong bóng, không có quả bong bóng nào ở cùng trong một ô, và các bong bóng không vượt được nhau. Mỗi lần người ta có thể cho một bong bóng nổi lên một vài ô tùy thích. Trò chơi kết thúc khi các bong bóng được xếp đuôi nhau nổi trên đỉnh ống. Người thua trận là người không đẩy được bong bóng tiếp tục lên.



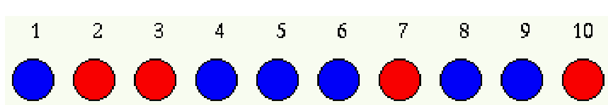
Trong trò chơi này chúng ta cũng đều tìm được NIM.

d) Tiều Phu đốn củi. Trong một cánh rừng lưới ô vuông, cây mọc ở mắt lưới, chỗ có cây, chỗ thì không có (hình vẽ). Các tiều phu (người chơi) thay nhau đốn cây (gạch chéo): người đến lượt được chọn 1 hay vài cây cùng hàng và đứng liên tiếp nhau để chặt. Người thua là người không còn cây để chặt.



Về hình thức đây là một Nim cho 8 bốc sỏi. (Cũng có thể nhân tạo thêm số bốc sỏi bằng cách chặt cây ở giữa cụm, nhưng là thực chất không gây biến đổi tổng NIM (!!!) và vì thế không ảnh hưởng đến kết quả cuối cùng).

e) Trò chơi LẬT XU. Có 10 miếng bìa tròn, một mặt được sơn xanh, mặt kia được sơn đỏ. Dể bắt đầu người ta xếp các tấm bìa tròn thành hàng, mặt trên là màu xanh hoặc đỏ bất kỳ. Người đến lượt có thể chọn một trong hai cách làm: hoặc chọn một tấm bìa tròn trên màu đỏ và chuyển từ đỏ lên xanh, hoặc tìm lật mặt hai tấm bìa tròn, nhưng trong số tấm bên phải (số thứ tự lớn hơn) phải chuyển từ đỏ thành xanh. Người thắng là người sau bước đi của mình thì tất cả các tấm bìa có mặt bên trên là màu xanh.



f) Trò chơi: RIM. Người ta lấy sỏi từ một vài bốc sỏi. Mỗi lần lấy người ta có thể chọn từ một bốc và lấy ra một số viên sỏi sao cho số sỏi vừa lấy nguyên tố cùng nhau với số sỏi vừa được lấy ra lần trước.

Trò chơi này tất nhiên là tổng của trò chơi NGUYÊN TỐ CÙNG NHAU chúng ta đã biết. Vì thế chiến lược thắng là chiến lược TỔNG NIM.

g) Trò chơi: DIM. Người ta lấy sỏi từ một vài bốc sỏi. Khác với bài trên ở chỗ số sỏi được lấy ra là ước số của số sỏi ban đầu trong bốc sỏi nó được lấy ra.
Ta nhận thấy đây là trò chơi tổng. Trong trường hợp chỉ có một bốc sỏi số Grundy sẽ là như sau với n là số sỏi, G_n là số Grundy:

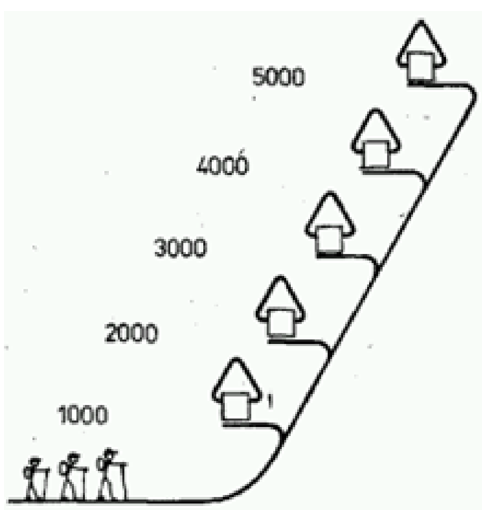
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
G_n	0	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	5	1	2	1	3

Thông thường nếu số sỏi chia hết cho 2^k, nhưng không chia hết cho $2^k + 1$, khi đó số Grundig của nó sẽ là $k + 1$.

Sau đây là trò chơi tổng hợp của các trò chơi trên.

h) Trò chơi: RIDINIM. Có 3 bốc sỏi. Mỗi bước đi người ta chỉ có thể lấy sỏi từ một bốc và theo các nội quy sau. Ở bốc thứ nhất số sỏi được lấy ra phải nguyên tố cùng nhau với số sỏi lấy ra lần trước từ bốc sỏi này (RI), từ bốc sỏi thứ 2 số sỏi được lấy ra phải là ước số của số sỏi có trong bốc đó (DI), từ bốc thứ 3 có thể lấy bao nhiêu tùy thích (NIM).
Xuất phát từ 3 bốc, mỗi bốc 10 viên sỏi. Bốc đầu tiên có số Grundy là 0, bốc thứ hai là 2 và bốc thứ 3 là 10. Người đi đầu có chiến thuật thắng, với bước đi duy nhất đầu tiên là lấy 8 viên sỏi từ bốc sỏi thứ 3.
Ngoài trò chơi bốc sỏi ta cũng có thể tổng hợp các trò chơi khác các trò chơi cơ bản như Cầu Thang và cũng có thể chơi theo kiểu NIM.

i) Trò chơi leo núi. Cần phải đưa ba nhà thám hiểm lên một ngọn núi $5000m$. Các nhà thám hiểm sức khỏe không như nhau, người thứ nhất đi $1000m$ thì phải nghỉ, người thứ hai đi được tối đa $2000m$, người thứ ba có thể đi tối đa $3000m$. Trên suốt lộ trình cứ $1000m$ thì có một nhà nghỉ có thể đủ chỗ cho tất cả mọi người nghỉ nếu cần. Các nhà thám hiểm có thể nghỉ sớm trước thời gian chịu đựng. Hai hướng dẫn viên tham gia trò chơi. Mỗi người mỗi lần phải đưa một người lên núi với các điều kiện sức khỏe nêu trên. Người thắng cuộc là người mang được người cuối cùng lên đỉnh núi.



Đây là trò chơi cầu thang thú vị: Thang cao 5 đơn vị. Mỗi lần có thể bước 1, 2 hoặc 3 đơn vị. Người thắng cuộc là người đưa được người cuối cùng lên đỉnh núi.

5 Các trò chơi khác

a) Trò chơi: Tô mầu. Cho lưới ô vuông $n \times k$. Hình vuông mẫu cạnh m $(m \leq k; n)$ hai người chơi. Đến lượt người chơi sẽ chọn sơn một hình vuông $m \leq m$ vào chỗ tùy ý nhưng không đè lên các vùng đã bị sơn (có thể tiếp xúc cạnh). Người thua là người không tiếp tục sơn được nữa. Ai có chiến lược thắng?

b) Trò chơi: Trihex. Trên hình vẽ, hai người chơi thay đổi nhau đánh dấu các vòng tròn con trên hình. Ai có trước 3 vòng tròn con thẳng hàng là người đó thắng. Hỏi ai có chiến thuật thắng? Chiến thuật như thế nào?

c) Trò chơi: Dawson's Chess. Cho một dải giấy chia ô vuông $1n$. Hai người thay nhau điền kí hiệu X vào các ô vuông sao cho các ô đã bị đánh dấu X không đứng cạnh nhau. Ai là người có chiến lược thắng trận?

d) Trò chơi: Lật xu (tiếp theo). Có 10 miếng bìa tròn, một mặt được sơn xanh, mặt kia được sơn đỏ. Để bắt đầu người ta xếp các tấm bìa tròn thành hàng, mặt trên là màu xanh hoặc đỏ bất kỳ. Người đến lượt được chọn một tấm bìa tròn mặt trên màu đỏ và up mặt lại tất cả các tấm bìa đứng bên phải nó và kể cả nó. Người thua cuộc là người không chọn, không đi tiếp được. Hỏi ai có chiến lược thắng?

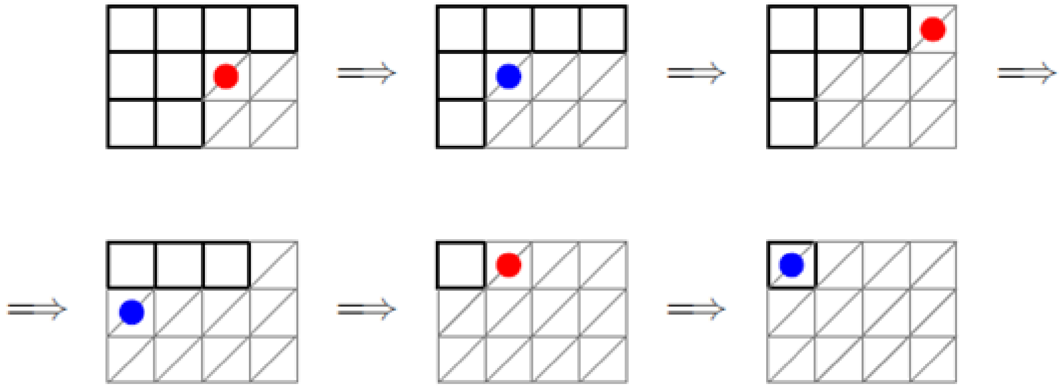
e) Trò chơi: Wythoff – Nim. Hai bốc sỏi. Hai người thay nhau lấy hoặc từ một bốc nhiều ít tùy ý thích, hoặc từ cả hai bốc số sỏi bằng nhau tùy ý. Ai lấy viên sỏi cuối cùng là người thắng. Hỏi ai có chiến thuật thắng?
Ghi chú: Trường hợp tổng quát chiến thuật thắng tương đối phức tạp.

f) Trò chơi: Fibonacci – Nim. Có một bốc n viên sỏi. Hai người chơi. Người đầu tiên có thể lấy bao nhiêu tùy ý nhưng không lấy hết cả bốc. Sau đó người tiếp theo có thể lấy không quá hai lần số sỏi người vừa đi trước lấy nhưng phải lấy ít nhất một viên. Ai là người chiến thắng?

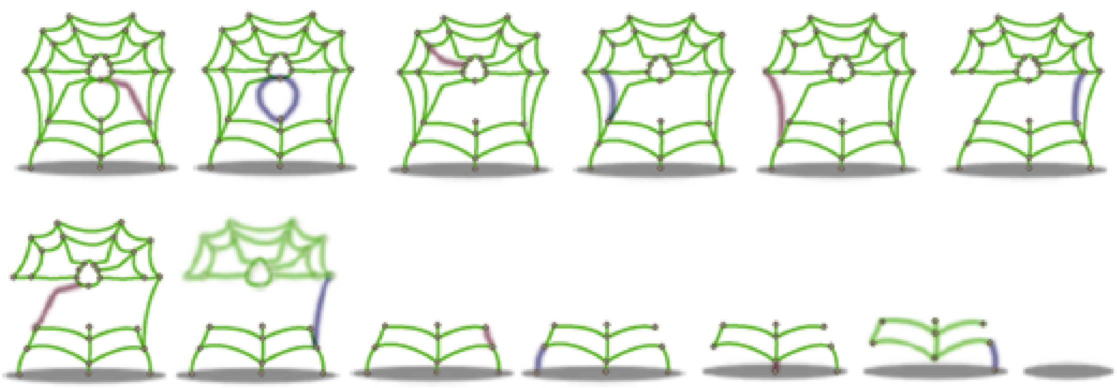
6 Một số đề tài nghiên cứu

Đề tài 1 (Thanh socola nhiễm độc)**.** Cho một thanh socola kích thước $n \times m$ có hình vuông góc trái bên trên nhiễm độc. Hai người chơi. Họ thay nhau đánh dấu một ô vuông bất kì rồi bẻ từ ô vuông đó về bên phải và xuống dưới là phần của mình. Tiếp theo người đi sau cũng làm tương tự. Người bị thua là người phải nhận hình vuông nhiễm độc.
Hãy phân tích khả năng thua thắng trong trò chơi này.

Ví dụ: Với thanh socola 3×4. Người đi đầu màu đỏ, người thứ 2 mầu xanh.



Đề tài 2 (Tỉa cây trong vườn hoa). **Qui tắc dọn vườn.**
DEF. Vườn được tượng trưng bằng một đồ thị không hướng $G(V, E)$. Trong đó $F \subseteq V$ là tập các đỉnh sao cho F có trong mọi đồ thị thành phần của G. Quy tắc của trò chơi như sau: Những người chơi thay nhau lấy đi một cạnh của đồ thị. Nếu có một đỉnh x thỏa mãn $x \notin F$ và từ F không có đường đi dẫn vào một đỉnh nào đó thuộc F, khi đó người ta xóa ngay đỉnh x và tất cả các cạnh xuất phát từ x. Do đó với việc lấy một cạnh có thể làm nhiều cạnh và đỉnh khác bị xóa theo. Người thua là người không đi tiếp được.



Nội dung của bài toán chính là phản ánh việc dọn cây trong vườn. Cho trước một đồ thị – vườn, một số mầm cây nảy mầm trên mặt đất. Các thành phần của vườn đều được nối với mặt đất. Mỗi bước đi người ta xóa một cạnh. Sau đó những thành phần nào trở thành không được nối với đất thì rơi rụng và vì thế sẽ bị dọn đi. Người thắng là người lấy cạnh cuối cùng.

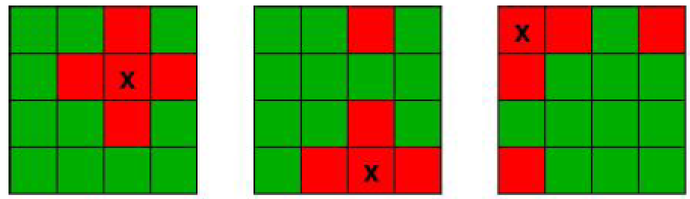
Đề tài 3 (Trò chơi chia hết). Hai người chơi. Đầu tiên họ thống nhất với nhau một số tự nhiên N. Hai người thay nhau viết lên bảng ước số của N nhưng phải tuân theo quy tắc không được ghi những số mà là ước số của một số đã được viết rồi trước đó. Người phải ghi số N là người thua.

Đề tài 4 (Trò chơi Button Madness – Một người chơi). Có bảng 4×4 (tổng quát hóa $n \times m$). Trên các ô vuông có các nút bấm có thể làm chuyển màu của ô vuông và các ô bên cạnh (cùng cạnh). Mỗi bước đi được thực hiện như sau:
Người ta bấm nút trên một ô vuông chọn tùy ý, khi đó:

- Ô được bấm nút chuyển màu (đỏ $\leftrightarrow$ xanh)
- Bốn ô cùng cạnh (trên – dưới – phải – trái) đổi màu.

- Nếu ô bên cạnh nào đó bị trượt ra ngoài bảng thì ô theo vòng xuyến đổi màu.

Minh họa các ảnh hưởng màu.



Đích cần đạt được là từ một tình trạng nào đó cho trước (ví dụ tất cả là màu xanh), I đạt được tình trạng tất cả các ô có mầu đỏ trước là người thắng cuộc.