SỬ DỤNG TÍNH CHẤT HÀM TUYẾN TÍNH GIẢI BÀI TOÁN MAX-MIN VÀ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Thiều Quang Tùng
THCS Cầu Giấy, Hà Nội

1 Mở đầu

Bất đẳng thức nói chung và bài toán max-min nói riêng là một trong những dạng bài toán phổ biến. Các bài toán này xuất hiện không chỉ trong các kỳ thi học sinh giỏi Toán mà cả trong những đề thi đại trà với rất nhiều phương pháp giải khác nhau. Bài viết này trình bày phương pháp sử dụng tính chất tuyến tính để giải bài toán max-min và chứng minh bất đẳng thức.

Định nghĩa 1.1. Một đa thức được gọi là tuyến tính nếu đa thức đó có dạng $P(x) = ax + b$.

Nhận xét 1.1. Khi $a = 0$ thì $P(x) = b$ là hằng số. Khi $a \neq 0$, ta có $P(x)$ là hàm bậc nhất.

Tính chất 1.1. Nếu $x_1 \leq x \leq x_2$ thì

$$\max_{x_1 \leq x \leq x_2} P(x) = \max\{P(x_1),\ P(x_2)\}$$

và

$$\min_{x_1 \leq x \leq x_2} P(x) = \min\{P(x_1),\ P(x_2)\}.$$

Chứng minh.

Nếu $a \geq 0$ thì từ ta có $ax_1 + b \leq ax + b \leq ax_2 + b$, hay $P(x_1) \leq P(x) \leq P(x_2)$. Từ đó suy ra

$$\max_{x_1 \leq x \leq x_2} P(x) = P(x_2)$$

và

$$\min_{x_1 \leq x \leq x_2} P(x) = P(x_1).$$

Nếu $a < 0$ thì từ $x_1 \leq x \leq x_2$, ta có $ax_1 + b \geq ax + b \geq ax_2 + b$, hay $P(x_1) \geq P(x) \geq P(x_2)$. Từ đó suy ra

$$\max_{x_1 \leq x \leq x_2} P(x) = P(x_1)$$

và

$$\min_{x_1 \le x \le x_2} P(x) = P(x_2).$$

Từ hai trường hợp trên ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét 1.2. Từ tính chất trên, ta thấy rằng nếu tập giá trị của biến là một đoạn thẳng, thì đa thức tuyến tính đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất tại hai đầu mút của đoạn thẳng đó. Việc vận dụng tính chất này trong bài toán max-min hoặc chứng minh minh bất đẳng thức, chúng ta cần đưa biểu thức trong bài toán về dạng đa thức bậc nhất của một biến nào đó. Đồng thời, cần chỉ ra tập giá trị của biến đó là một đoạn thẳng.

Bài toán 1.1. Cho các số thực không âm $a,\ b,\ c$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng $abc \le 1$.

Lời giải. Chúng ta có thể dễ dàng thu được điều cần chứng minh bằng việc sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số. Lời giải sau đây sử dụng tính chất tuyến tính được trình bày ở trên.

Xét $f(t) = ct - 1$, với $0 \le t = ab \le \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{3-c}{2}\right)^2$.

Khi đó ta có

$$\max f(t) = \max\left\{ f(0),\ f\left(\left(\frac{3-c}{2}\right)^2\right)\right\}.$$

+) $f(0) = -1 < 0$.

+) $f\left(\left(\dfrac{3-c}{2}\right)^2\right)$

$$= c\left(\frac{3-c}{2}\right)^2 - 1 = \frac{c^3-6c^2+9c-4}{4} = \frac{(c-1)^2(c-4)}{4}.$$

Từ giả thiết $a,\ b,\ c$ là các số thực không âm và $a+b+c=3$, ta có $0 \le c \le 3$. Do đó $c-4<0$. Từ đó suy ra $f\left(\left(\dfrac{3-c}{2}\right)^2\right) \le 0$.

Vậy $\max f(t) \le 0$. Từ đó ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài toán 1.2 (HOMC, Junior 2019)**.** Cho số thực không âm $a,\ b,\ c$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = 3(ab+bc+ca) - 2abc$.

Lời giải. Ta chứng minh $M \le 7 \Leftrightarrow (3-2c)ab + 3c(a+b) - 7 \le 0$. Hay $(3-2c)ab + 3c(3-c) - 7 \le 0$.

Xét $f(t) = (3-2c)t + 3c(3-c) - 7$, với

$$0 \le t = ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{3-c}{2}\right)^2.$$

Khi đó, ta có

$$\max f(t) = \max\left\{f(0),\ f\left(\left(\frac{3-c}{2}\right)^2\right)\right\}.$$

+) $f(0) = 3c(3-c) - 7 = -3\left(c - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \leq -\frac{1}{4} < 0.$

+) $f\left(\left(\frac{3-c}{2}\right)^2\right)$

$$= (3-2c)\left(\frac{3-c}{2}\right)^2 + 3c(3-c) - 7 = \frac{-2c^3 + 3c^2 - 1}{4} = \frac{(c-1)^2(-2c-1)}{4} \leq 0.$$

Vậy $\max f(t) \leq 0$. Từ đó ta có $M \leq 7 \Rightarrow M_{\max} = 7$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bài toán 1.3. Cho các số thực không âm $a,\ b,\ c$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $N = 7(a^2 + b^2 + c^2) + 6abc$.

Lời giải. Ta chứng minh $N \geq 27 \Leftrightarrow 7(a+b+c)^2 - 14(ab+bc+ca) + 6abc \geq 27$

$$\Leftrightarrow 7(ab+bc+ca) - 3abc - 18 \leq 0 \Leftrightarrow (7-3c)ab + 7c(3-c) - 18 \leq 0.$$

Xét $f(t) = (7-3c)t + 7c(3-c) - 18$, với $0 \leq t = ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{3-c}{2}\right)^2$.

Khi đó ta có

$$\max f(t) = \max\left\{f(0),\ f\left(\left(\frac{3-c}{2}\right)^2\right)\right\}.$$

+) $f(0) = 7c(3-c) - 18 = -7\left(c - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \leq -\frac{9}{4} < 0.$

+) $f\left(\left(\frac{3-c}{2}\right)^2\right)$

$$= (7-3c)\left(\frac{3-c}{2}\right)^2 + 7c(3-c) - 18 = \frac{-3c^3 - 3c^2 + 15c - 9}{4} = \frac{3(c-1)^2(-c-3)}{4} \leq 0.$$

Vậy $\max f(t) \leq 0$. Từ đó ta có $N \geq 27 \Rightarrow M_{\min} = 27$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bài toán 1.4 (Học sinh giỏi Toán 9 Hà Nội, 2018-2019)**.** Cho các số thực dương $a,\ b,\ c$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = ab + bc + ca - abc$.

Lời giải. Ta chứng minh $P \leq \frac{5}{8}$.

Trong 3 số $a,\ b,\ c$ bất kỳ, luôn tồn tại hai số không lớn hơn $\frac{1}{2}$. Giả sử là a và b. Khi đó ta có $(2a-1)(2b-1) \geq 0 \Leftrightarrow a+b \leq 2ab + \frac{1}{2} \Rightarrow c(a+b) \leq 2abc + \frac{1}{2}c$.

Suy ra

$P - \frac{5}{8} = (1-c)ab + c(a+b) - \frac{5}{8} \leq (1-c)ab + 2abc + \frac{1}{2}c - \frac{5}{8} = (1+c)ab + \frac{1}{2}c - \frac{5}{8}$.

Từ giả thiết, ta có

$1 = a^2 + b^2 + c^2 + 2abc \geq 2ab + c^2 + 2abc = 2(1+c)ab + c^2$ nên $ab \leq \dfrac{1-c^2}{2(1+c)}$.

Xét $f(t) = (1+c)t + \frac{1}{2}c - \frac{5}{8}$, với $0 < t = ab \leq \dfrac{1-c^2}{2(1+c)}$.

Ta có $\max f(t) \leq \max \left\{ f(0),\ f\left(\dfrac{1-c^2}{2(1+c)}\right) \right\}$.

+) $f(0) = \frac{1}{2}c - \frac{5}{8} < 0$ (vì từ giả thiết có c < 1)

+ $f\left(\dfrac{1-c^2}{2(1+c)}\right)$

$$= (1+c).\frac{1-c^2}{2(1+c)} + \frac{1}{2}c - \frac{5}{8} = \frac{-4c^3+3c-1}{8} = \frac{(2c-1)^2(-c-1)}{8} \leq 0.$$

Vậy $f(t) \leq 0$ với mọi $0 < t \leq \dfrac{1-c^2}{2(1+c)}$.

Từ đó ta có $P \leq \frac{5}{8} \Rightarrow P_{\max} = \frac{5}{8}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

2 Bài tập vận dụng

Bài 1. Cho các số thực không âm $a,\ b,\ c$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = ab + bc + ca - 2abc$.

Bài 2. Cho các số thực không âm $a,\ b,\ c$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = a^3 + b^3 + c^3 + \frac{15}{4}abc$.

Bài 3. Cho các số thực không âm $a,\ b,\ c$. Chứng minh rằng $(a+b+c)^3 + 9abc \leq 4(a+b+c)(ab+bc+ca)$.

Bài 4. Cho các số thực không âm $a,\ b,\ c$. Chứng minh rằng $x^2(y+z-x) + y^2(z+x-y) + z^2(x+y-z) \leq 3xyz$.

Bài 5. Cho các số thực không âm $a,\ b,\ c$. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq (ab+bc+ca)(a+b+c)$.