MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH OLYMPIC GIẢI BẰNG KIẾN THỨC TRONG SÁCH GIÁO KHOA

Nguyễn Bá Đang

Hội Toán học Hà Nội

1 Mở đầu

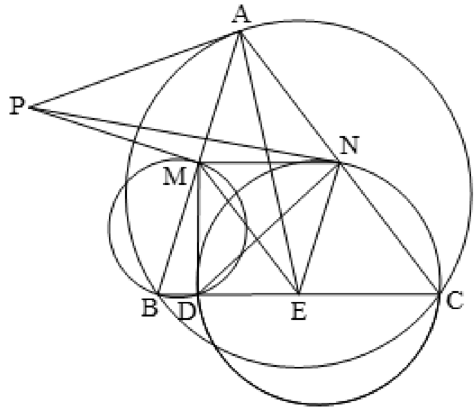
Hiện nay xu hướng chung của nhiều nước trong các kì Olympic thì *bài toán hình học* rất cơ bản để có thể giải được bằng những kiến thức trong chương trình sách giáo khoa. Chính vì lẽ đó, khi dạy và học toán hình học cần nắm chắc những kiến thức cơ bản, không nhất thiết mở rộng kiến thức ngoài chương trình, và nên quan niệm điều mở rộng chỉ như bài tập. Tôi minh họa bằng các bài toán sau.

2 Các bài toán

Bài toán 2.1 (USA MO 2019)**.** Cho tam giác nhọn ABC, M, N là trung điểm AC và AB, P là điểm trên tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, đường tròn qua M và B đồng thời tiếp xúc với PM tại M, đường tròn qua N và C đồng thời tiếp xúc với PN tại N. Chứng minh rằng hai đường tròn đó cắt nhau trên BC.

Lời giải.

Cách 1.



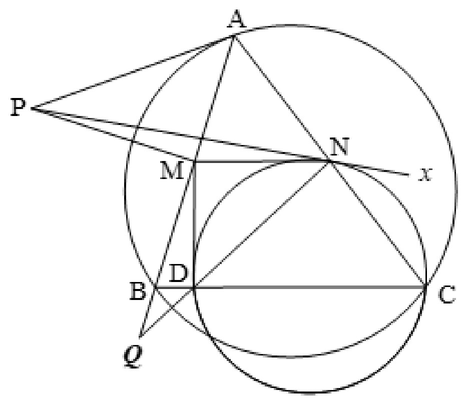
Gọi E là trung điểm cạnh BC và D là giao điểm của BC với đường tròn qua M và B đồng thời tiếp xúc với PM tại M.

Ta có $\angle MEB = \angle ACB = \angle PAB, \angle EDM = 180^o - \angle MDE = 180^o - \angle PMB = \angle AMP$ và $\triangle EDM \backsim \triangle AMP$ (g.g) .

Suy ra $\dfrac{ED}{EM} = \dfrac{AM}{AP}$.

Giả thiết M, N là trung điểm AB, AC thì $\dfrac{ED}{AN} = \dfrac{NE}{AP}$ mà $\angle PAN = \angle PAB + \angle BAC = 180^o - \angle ABC = 180^o - \angle NEC = \angle NED$ nên $\triangle PAN \backsim \angle NDE$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle ANP = \angle EDN$ và $\angle PND = \angle PNM + \angle MND = \angle PNM + \angle CDN = \angle PNM + \angle ANP = \angle ANM = \angle NCD$. Vậy PN là tiếp tuyến với đường tròn (DNC) và đường tròn qua M và B đồng thời tiếp xúc với PM và đường tròn qua N và C đồng thời tiếp xúc với PN cắt nhau tại D trên cạnh BC.

Cách 2.



Giả sử đường tròn qua N, C đồng thời tiếp xúc với PN tại N cắt cạnh BC tại D, trên tiếp tuyến PN kéo dài ta gọi là tia Nx.

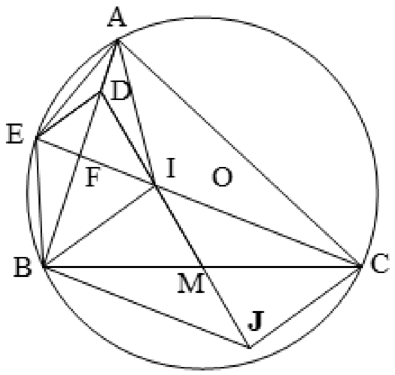
Khi đó $\angle CNx = \angle CDN = \angle MND$, ND cắt AB kéo dài tại Q. Suy ra $\angle NDC = \angle QDB$ $= \angle MNQ$ hay $\angle MNQ = \angle ANP$ và PA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Vậy nên $\angle PAN = \angle PAB = \angle BAC = \angle ACB + \angle BAC = 180^o - \angle ABC = \angle BMN$ và $\triangle APN \backsim MQN$ (g.g).

Bài toán 2.2 (China MO 2014)**.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường tròn nội tiếp tâm I, M là trung điểm BC, MI cắt AB tại D, CI cắt đường tròn (O) tại E. Chứng minh $\dfrac{ED}{EI} = \dfrac{IB}{IC}$.

Lời giải.

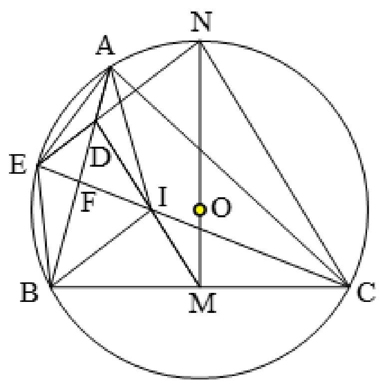
Cách 1.



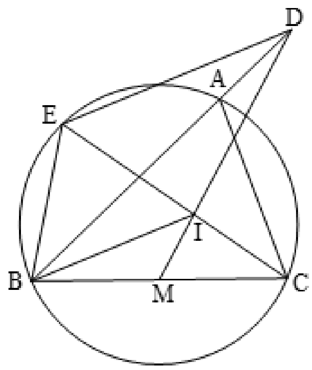
Giả thiết I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác EBI:
$\angle EBI = \angle EBA + \angle ABI$
$= \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BCA)$,
$\angle EIB = \angle IBC + \angle ICB$
$= \frac{1}{2}(ABC + \angle BCA)$.
Suy ra $\angle EBI = \angle EIB$ nên tam giác EBI là tam giác cân và $EI = EB$.

Dựng hình bình hành $BICJ$. Ta có FC song song BJ. Theo Định lí Thales $\frac{DI}{DJ} = \frac{FI}{BJ}$, F là giao CE và AB nên $\frac{AF}{AC} = \frac{FI}{IC}$, tam giác AFC và BEC có $\angle FAC = \angle BEC$ và $\angle ACF = \angle ECB$ nên $\frac{AF}{AC} = \frac{EB}{EC}$ và $\frac{DI}{DJ} = \frac{FI}{BJ} = \frac{FI}{IC} = \frac{AF}{AC} = \frac{EB}{EC} = \frac{EI}{EC}$. Suy ra DE song song CJ, DE song song BI và $\angle ICB = \angle EBD = \frac{1}{2}\angle ACB$, $\angle EDB = \angle DBI = \angle IBC = \frac{1}{2}\angle ABC \Rightarrow$ tam giác EBD và ICB đồng dạng (g.g) và $\frac{ED}{EB} = \frac{IB}{IC}$.

Cách 2.



Gọi F là giao của CE và cạnh AB, theo Định lí Menelaus với tam giác BFC, cát tuyến MID: $\frac{MB}{MC}.\frac{IC}{IF}.\frac{DF}{DB} = 1$, do $MB = MC$ nên $\frac{IC}{IF} = \frac{DB}{DF}$, I là tâm đường tròn nội tiếp $\Rightarrow$ $\frac{IC}{IF} = \frac{AC}{AF}$, tam giác AFC và tam giác EFB đồng dạng (g.g) $\Rightarrow \frac{AC}{AF} = \frac{EB}{EF}$
từ đó ta có: $\frac{DB}{DF} = \frac{IC}{IF} = \frac{AC}{AF} = \frac{EB}{EF} = \frac{EI}{EF}$, theo Định lý Thales $\Rightarrow DE$ song song BI.



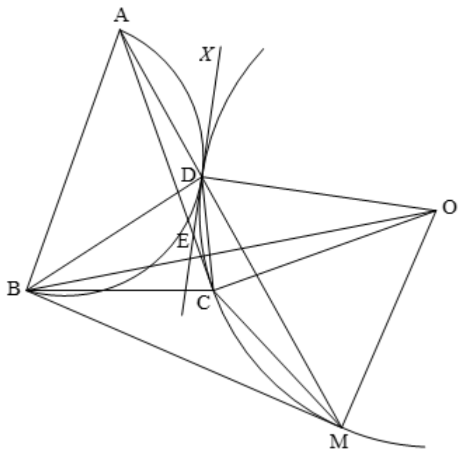
Gọi N là giao điểm MO và đường tròn $(O) \Rightarrow MO$ vuông góc BC và N là điểm chính giữa cung $BAC \Rightarrow \angle NEC = \angle BCN = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) \Rightarrow \angle NEC = \angle EIB \Rightarrow EN$ song song $BI \Rightarrow E, D, N$ thẳng hàng. Giả thiết I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC
$\Rightarrow \angle BIC = 90^0 + \frac{1}{2}\angle BAC$,

$\angle BED = \angle BEC + \angle CEN = \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = 90^0 + \frac{1}{2}\angle BAC.$

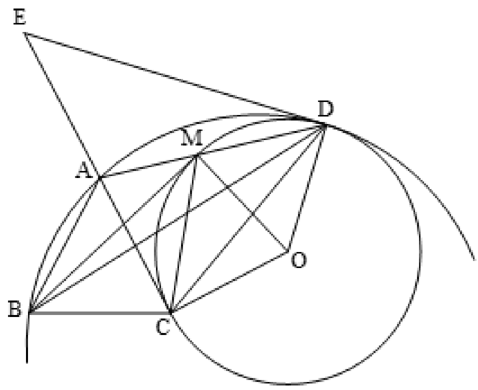
Mặt khác $\angle ABE = \angle ACE = \angle BCE \Rightarrow$ tam giác EBD và ICB đồng dạng (g.g) $\Rightarrow \frac{ED}{EB} = \frac{IB}{IC}$.

Bài toán 2.3 (Hongkong)**.** Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$), đường tròn tâm (O) nằm ngoài tam giác ABC đồng thời tiếp xúc với cạnh AC tại C, D là điểm trên đường tròn (O), đường tròn (ABD) tiếp xúc với đường tròn (O) tại D, AD cắt đường tròn tâm (O) tại M. Chứng minh BM là tiếp tuyến của đường tròn tâm (O).

Lời giải.



Giả thiết $AB = AC$ và AC tiếp xúc với đường tròn (O) tại C, D là điểm trên đường tròn (O), đường tròn (ABD) tiếp xúc với đường tròn (O) tại D, AD cắt đường tròn tâm (O) tại M $\Rightarrow AB^2 = AC^2 = AD.AM \Rightarrow \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AM}{AB} \Rightarrow$ tam giác ABD và tam giác AMB đồng dạng (c.g.c) $\Rightarrow \angle ABD = \angle BMA = \angle BMD$.



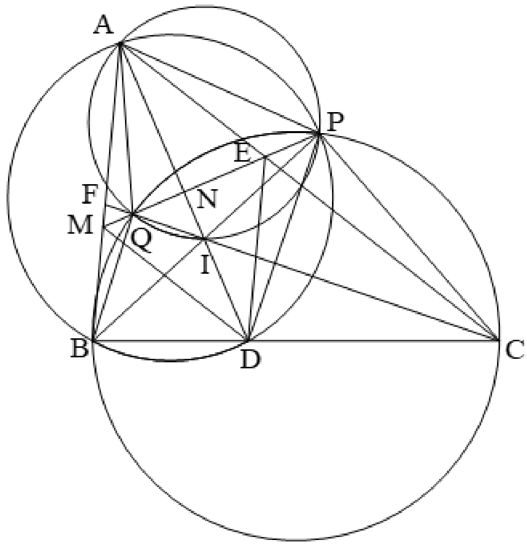
Đường tròn (O) và đường tròn (ADB) tiếp xúc nhau tại D, qua D kẻ tiếp tuyến Dx với hai đường tròn cắt AC tại E $\Rightarrow \angle CDE = \angle CMD$

và $\angle BAD = \angle BDE$

$\Rightarrow \angle BMC = \angle BMD - \angle CMD = \angle ABD - \angle CDE = 180^0 - \angle BAD - \angle BDA - \angle CDE = 180^0 - \angle BDE - \angle BDA - \angle CDE = 180^0 - \angle BDA - \angle BDC = \angle BDM - \angle BDC = \angle CDM \Rightarrow \angle BMC = \angle CDM \Rightarrow BM$ là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài toán 2.4. Cho tam giác ABC, I là tâm đường tròn nội tiếp, đường thẳng AI, BI, CI cắt cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường trung trực AD cắt BE, CF tại P và Q. Chứng minh P, Q, A, I nằm trên một đường tròn.

Lời giải.

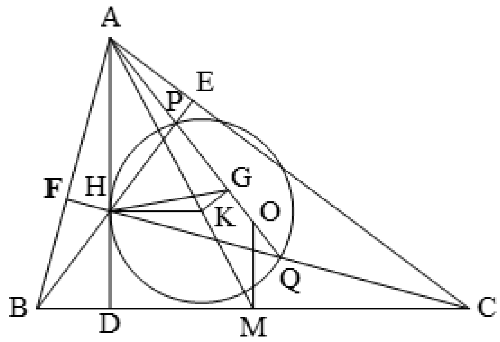


Gọi N là trung điểm AD, M là giao điểm trung trực AD với cạnh $AB \Rightarrow \angle AMP = \angle PMD$, giả thiết BP là phân giác góc $\angle ABC$ theo tính chất đường phân giác $\triangle BMD \Rightarrow \angle MDP = \angle PDC$. Giả thiết AD là phân giác góc A, MP là trung trực $AD \Rightarrow \angle MAP = \angle MDP \Rightarrow \angle BDP + \angle BAP = \angle BDP + \angle PDC = 180^0 \Rightarrow$ tứ giác $ABDP$ nội tiếp $\Rightarrow \angle APD = 180^0 - \angle ABC \Rightarrow \angle MPD = 90^0 - \dfrac{1}{2}\angle ABC, \angle BPD = \angle BAD = \dfrac{1}{2}\angle BAC$

$\Rightarrow \angle MPB = \angle MPD - \angle BPD = 90^0 - \dfrac{1}{2}\angle ABC - \dfrac{1}{2}\angle BAC = 90^0 - \dfrac{1}{2}(\angle ABC + \angle BAC) = \dfrac{1}{2}\angle ACB$, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $ABC \Rightarrow \angle QCB = \dfrac{1}{2}\angle ACB \Rightarrow \angle QCB = \angle QPB \Rightarrow$ tứ giác $QPCB$ nội tiếp $\Rightarrow \angle PQI = \angle PQC = \angle PBC = \dfrac{1}{2}\angle ABC, \angle PAI = \angle PAD = \angle PBD = \dfrac{1}{2}\angle ABC \Rightarrow \angle PQI = \angle PAI = \dfrac{1}{2}\angle ABC \Rightarrow$ tứ giác $AQIP$ nội tiếp hay P, Q, A, I nằm trên một đường tròn.

Bài toán 2.5 (Bosnia TST 2018)**.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao AD, BE và CF cắt nhau tại H, AO cắt BE, CF tại P và Q. Chứng minh trung tuyến kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HPQ.

Lời giải.



Theo giả thiết H là trực tâm tam giác $ABC \Rightarrow \angle BAH = \angle CAO$, BE, CF là đường cao tam giác $ABC \Rightarrow \angle HPQ = \angle APE = 90^0 - \angle CAO = 90^0 - \angle BAH = \angle ABC$. Tương tự $\angle HQP = \angle ACB$. Mặt khác tứ giác $DHEC$ nội tiếp $\Rightarrow \angle ACB = \angle BHD = \angle AHP \Rightarrow \angle HQP = \angle AHP \Rightarrow AH$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác HPQ.

Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $HPQ \Rightarrow KH$ vuông góc AH, gọi G là hình chiếu của K trên $PQ \Rightarrow$ tứ giác $AHKG$ nội tiếp $\Rightarrow \angle GAK = \angle GHK$. (1) Từ $\angle HPQ = \angle ABC$ và $\angle HQP = \angle ACB \Rightarrow$ tam giác HPQ và tam giác ABC đồng dạng (g.g). Theo tính chất hai tam giác $\Rightarrow \angle HGK = \angle AMO$ và $\angle HKG = \angle AOM \Rightarrow$ tam giác HKG và tam giác AOM đồng dạng (g.g) $\Rightarrow \angle OAM = \angle KHG$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \angle GAK = \angle OAM \Rightarrow A, K, M$ thẳng hàng $\Rightarrow AM$ đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HPQ.