Hai bài hình học thi chọn đội tuyển PTNK năm 2014

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết này sẽ xoay quanh và phát triển hai bài hình học thi chọn đội tuyển PTNK năm 2014 bằng các công cụ hình học thuần túy.

Kỳ thì chọn đội tuyển PTNK ngày thứ nhất có bài hình học như sau

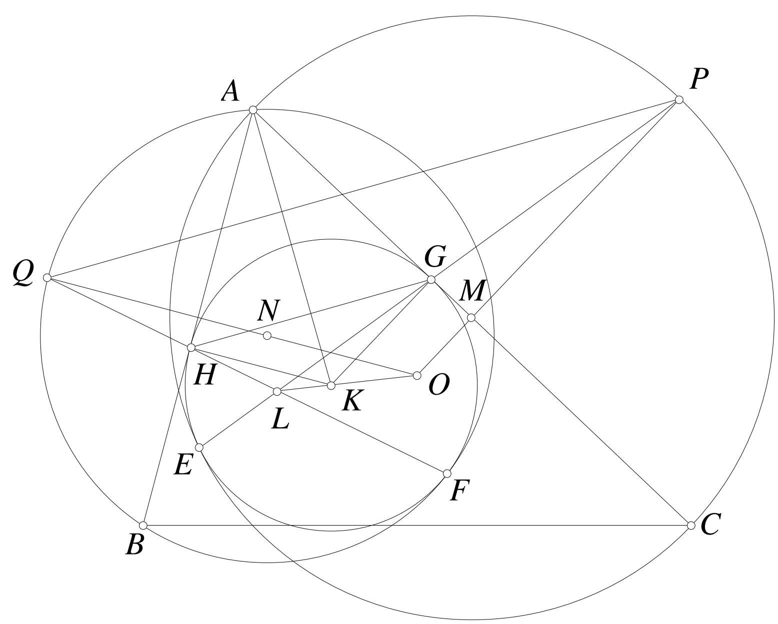
Bài 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có tâm O, B, C cố định và A di chuyển trên (O). (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC. (O_1) là đường tròn qua A, B tiếp xúc (I) tại E. (O_2) là đường tròn qua A, C tiếp xúc (I) tại F. Phân giác $\angle AEB$ cắt (O_1) tại M và phân giác $\angle AFC$ cắt (O_2) tại N.

a) Chứng minh rằng tứ giác $EFMN$ nội tiếp.

b) Gọi J là giao của EM và FN. Chứng minh rằng đường thẳng IJ luôn đi qua một điểm cố định.

Nhận xét. Sẽ thú vị nếu ta so sánh bài toán với bài thi chọn đội tuyển Romani năm 2006 [2]. Hai bài toán có chung một cấu hình và ý tưởng. Tuy nhiên cách tiếp cận bài thi chọn đội tuyển PTNK theo ý a) và b) như trên là một cách đi hay, bài toán thi như vậy trở nên có ý nghĩa. Tuy vậy việc cho xuất hiện điểm cố định O ngay trong đề bài làm cho bài toán trở nên dễ dàng hơn. Do đó tôi xin đề xuất một bài toán tổng quát hơn như sau

Bài 2. Cho tam giác ABC. Đường tròn (K) thay đổi tiếp xúc CA, AB. Đường tròn (M) qua A, C tiếp xúc trong (K) tại E. Đường tròn (N) qua A, B tiếp xúc trong (K) tại F. Phân giác các góc $\angle AEC$ và $\angle AFB$ cắt nhau tại L. Chứng minh rằng đường thẳng KL luôn đi qua một điểm cố định khi (K) di chuyển.



Hình 1.

Lời giải. Gọi (K) tiếp xúc CA, AB tại G, H. Theo một bổ đề quen thuộc thì EG là phân giác $\angle AEC$ do đó EG đi qua L và cắt (M) tại trung điểm P của cung $\overset{\frown}{AC}$ không chứa E. Tương tự FH đi qua L và cắt (N) tại trung điểm Q của cung $\overset{\frown}{AB}$ không chứa F. Dễ thấy PM, QN là trung trực của CA, AB nên PM, QN cắt nhau tại tâm ngoại tiếp O của tam giác ABC. Ta sẽ chứng minh rằng EG, FH đồng quy với KO như vậy KL sẽ đi qua O cố định, thật vậy.

Trước hết ta có $AP^2 - AQ^2 = PG.PE - QH.QF = (KP^2 - KG^2) - (KQ^2 - KH^2) = KP^2 - KQ^2$. Từ đó $PQ \perp AK \perp HG$. Vậy $PQ \parallel HG$. Tam giác OPQ và KGH có các cạnh tương ứng song song nên từ đó OK, PG, QH đồng quy. Ta có điều phải chứng minh. □

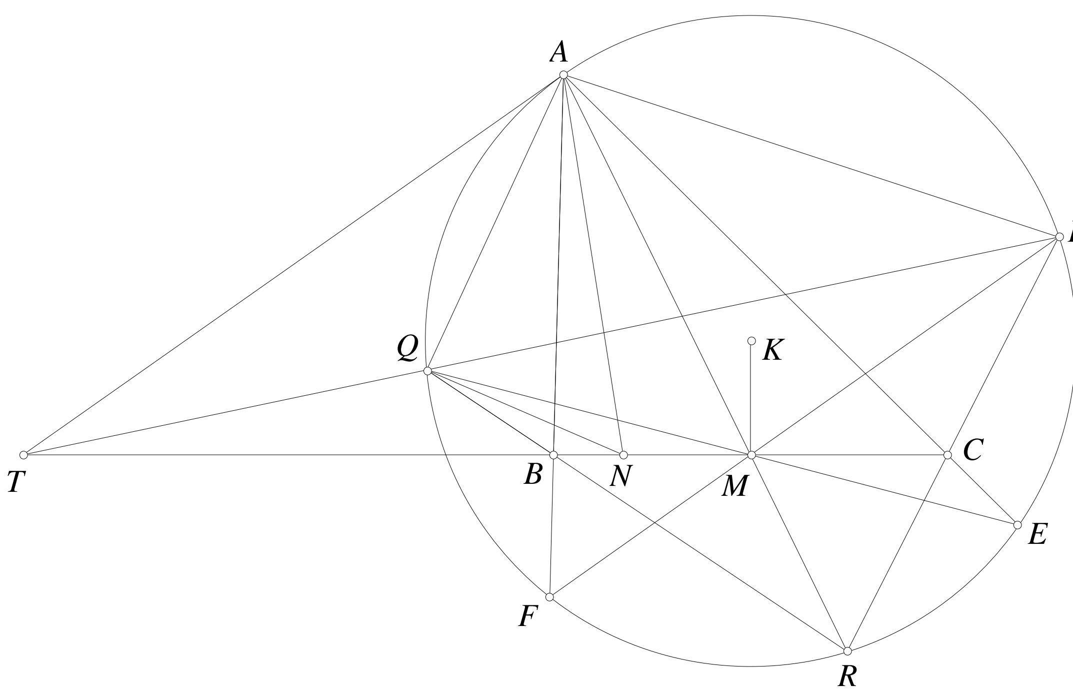
Nhận xét. Điều thú vị của bài toán trên là phải đoán nhận được điểm cố định O là tâm ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đường tròn (K) là đường tròn nội tiếp ta nhận lại được bài toán thi.

Trong kỳ thi chọn đội tuyển PTNK ngày thứ hai có bài hình học như sau

Bài 3. Cho tam giác ABC không cân có I là trung điểm của BC. Đường tròn (I) có tâm I đi qua A cắt AB, AC lần lượt tại M, N. IM, IN cắt (I) tại P, Q. Gọi K là giao của PQ với tiếp tuyến của (I) tại A. Chứng minh rằng K thuộc BC.

Nhận xét. Đây thực chất là một bài chứng minh đồng quy và là một bài toán hay có ý nghĩa. Tuy vậy điều kiện trung điểm I của BC có thể thay thế được. Sau đây chúng tôi xin giới thiệu và chứng minh một bài toán tổng quát hơn

Bài 4. Cho tam giác ABC với K là một điểm trên trung trực BC. Đường tròn (K) đi qua A cắt CA, AB tại E, F khác A. Gọi M là trung điểm BC. ME, MF cắt (K) tại Q, P khác E, F. Chứng minh rằng PQ, BC và tiếp tuyến tại A của (K) đồng quy.



Hình 2.

Lời giải. Gọi AM cắt (O) tại R khác A. Chú ý M là trung điểm BC và BC vuông góc với KM. Áp dụng bài toán con bướm cho tứ giác $AERQ$ suy ra RQ đi qua B. Tương tự RP đi qua C. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác AQB cắt BC tại N khác B. Gọi tiếp tuyến tại A của (K) cắt BC tại T. Ta dễ thấy $\angle ANB = 180° - \angle AQR = \angle APR = \angle TAR$ suy ra $\angle AMT = \angle TAN$ hay TA tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN. Ta lại có $\angle QNB = \angle QAB = \angle QPM$ suy ra tứ giác $PQNM$ nội tiếp. Từ đó ta có $TM.TN = TA^2$ nên T nằm trên trục đẳng phương của đường tròn (K) và đường tròn ngoại tiếp tứ giác $PQNM$ hay T thuộc PQ. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Khi K trùng với M ta thu lại được bài toán ban đầu.

Các bạn hãy cùng luyện tập một số bài toán tương tự sau

Bài 5. Cho tam giác ABC với đường cao AD, BE, CF và đường tròn nội tiếp (I). Đường tròn qua B, C tiếp xúc (I) tại X. Tương tự có Y, Z. Gọi M, N, P là trung điểm AD, BE, CF. Chứng minh rằng XM, YN, ZP đồng quy.

Bài 6. Cho tam giác ABC có đường tròn bàng tiếp góc A, B, C là $(I_a), (I_b), (I_c)$. (I_a) tiếp xúc BC tại D. Đường tròn qua B, C tiếp xúc với (I_a) tại X. Tương tự có E, F, Y, Z. Chứng minh rằng DX, EY, FZ đồng quy.

Bài 7. Cho tam giác ABC trung tuyến AM. Đường tròn (M) qua A cắt CA, AB tại E, F khác A. EM, FM cắt (O) tại P, Q khác E, F. PQ cắt CA, AB tại K, L. FK, EL cắt (M) tại G, H khác E, F. GH cắt BC tại T. Chứng minh rằng TA tiếp xúc (M).

Bài 8. Cho tam giác ABC với K thuộc trung trực BC và M là trung điểm BC. Đường tròn (K) qua A cắt CA, AB tại E, F khác A. EM, FM cắt (O) tại P, Q khác E, F. PQ cắt CA, AB tại $K, L.FK, EL$ cắt (K) tại G, H khác E, F. GH cắt BC tại T. Chứng minh rằng TA tiếp xúc (K).

Tài liệu

[1] Đề thi chọn đội tuyển PTNK năm 2014
http://diendantoanhoc.net/forum

[2] Romanian IMO TST 2006, day 3, problem 3
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=87922

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com