LỜI GIẢI BÀI SỐ 5 ĐỀ THI IMO 2015

Võ Quốc Bá Cẩn
(Archimedes Academy)

Bài toán 1. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) = x + f(x+y) + y \cdot f(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Lời giải 1. Thay $x = 0$ vào (1), ta được

$$f\big(f(y)\big) + f(0) = f(y) + y \cdot f(0), \quad \forall y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Nếu $f(0) \neq 0$ thì từ (2) ta dễ dàng suy ra f đơn ánh. Từ đó, bằng cách cho $y = 1$, ta thu được $f\big(f(1)\big) = f(1)$ và như thế $f(1) = 1$. Tiếp tục, bằng cách thay $y = 1$ vào (1), ta có

$$f\left(x + f(x+1)\right) = x + f(x+1), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Trong (2), ta thay y bởi $x + f(x+1)$ và sử dụng (3) thì có $x + f(x+1) = 1$, từ đó suy ra $f(x) = 2 - x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại, ta thấy đây là một nghiệm của phương trình đã cho.

Tiếp theo, ta xét trường hợp $f(0) = 0$. Trong (1), ta thay y bởi $y - x$ thì thu được

$$f\big(x + f(y)\big) + f(xy - x^2) = x + f(y) + (y - x) \cdot f(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Thay $y = x$ vào (4), ta được

$$f\big(x + f(x)\big) = x + f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Thay $y = 0$ vào (4), ta có

$$f(x) + f(-x^2) = x - x \cdot f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Trong (6), ta cho $x = -1$ thì tính được $f(-1) = -1$. Tiếp tục, cho $x = 1$ vào (6), ta tính được $f(1) = 1$. Thay $x = 1$ vào (6), ta có

$$f\big(1 + f(y)\big) + f(y - 1) = f(y) + y, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Trong (7), ta thay y bởi $y + f(y)$ và sử dụng các kết quả (5), (3) (chú ý rằng (3) cũng đúng trong trường hợp $f(0) = 0$), ta thu được

$$\begin{aligned} f\left(y + 1 + f(y)\right) &= 2y + 2 \cdot f(y) - f\left(y - 1 + f(y)\right) \\ &= 2y + 2 \cdot f(y) - \left(y - 1 + f(y)\right) \\ &= y + 1 + f(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{8}$$

Bây giờ, trong (4), ta thay x bởi $x + 1$ và thay $y = x$ thì có

$$f\left(x + 1 + f(x)\right) + f(-x - 1) = x + 1 + f(x) - f(x+1), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{9}$$